IFT339
Structures de données

Thème 2 : Complexité algorithmique

Aïda Ouangraoua
Département d'informatique

UNIVERSITÉ DE
SHERBROOKE

Contexte

- Plusieurs algorithmes pour une même opération

- Comparaison et choix de l'algorithme en fonction de deux critères : temps de calcul et espace de stockage (ressources à optimiser)

- Deux types de comparaison possibles

  - **Expérimentale** : implémenter les algorithmes sur la même machine avec les mêmes choix de programmation, et exécuter sur le même jeu de données.
    Limites : nécessité d'implémenter tous les algorithmes et tester sur des données de tailles raisonnables ; résultats de comparaison valables uniquement sur des données similaires aux données testées

  - **Théorique** : évaluer les complexités théoriques des alogorithmes avant de choisir lequel implémenter

Définition

- Complexité dans le pire des cas en temps: expression du nombre maximum d'instructions élémentaires effectuées lors d'une exécution de l'algorithme en fonction de la taille de l'entrée ➔ **borne supérieure du nombre d'instructions requises pour une exécution en fonction de n (taille de l'entrée).**

- Exemples d'instruction élémentaire
  - Appel de fonctions
  - Affectation
  - Opérateur arithmétiques sur des types primitifs sclaires
  - Retour de fonction

Définition

- Complexité dans le pire des cas en espace: expression de l'espace de stockage maximum requis pour les variables locales lors d'une exécution de l'algorithme en fonction de la taille de l'entrée ➔ **borne supérieure de la taille de l'espace requis en fonction de n (taille de l'entrée).**

- Complexité en moyenne (en temps ou en espace): moyenne de la complexité pour les différentes tailles d'entrée possibles, pondérées suivant la distribution des entrées.

Comparaison

- Critère de comparaison le plus fréquent: complexité en temps dans le pire des cas

- Comparaison des complexités et choix de l'algorithme pour des tailles de données très grandes.

- Exemple : deux algorithmes pour une même opération de complexités en temps : f(n) = n ! et g(n) = 2^n

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**10**
f(n)	1	2	6	24	120	…	3628800
g(n)	2	4	8	16	32	…	1024

  - Le second algorithme est choisi (g(n) = 2^n) car g(n) croît moins vite que f(n) pour des grandes valeurs de n (tendant vers l'infini).
  - Pour des petites valeurs de n, la différence entre les deux fonctions est insignifiante.

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour trouver la valeur maximum dans un tableau d'entiers

```
Algo A : Tableau de n entiers → Entier
    Entree : tab
    max ← tab[0]
    Pour i ← 1 à n-1
        Si max < tab[i]
            max ← tab[i]
    Sortie : max
```

```
Algo B : Tableau de n entiers → Entier
    Entree : tab
    Pour i ← 0 à n-1
        est_max ← Vrai
        Pour j ← 0 à n-1
            Si tab[i] < tab[j]
                est_max ← Faux
        Si est_max == Vrai
            max ← tab[i]
            Arret
    Sortie : max
```

Pour une instruction de complexité f(n) se trouvant dans une boucle qui se répète k fois, on compte k x f(n) instructions élémentaires.

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour trouver la valeur maximum dans un tableau d'entiers

```
Algo A : Tableau de n entiers → Entier
      Entree : tab
 1    max ← tab[0]
n-1   Pour i ← 1 à n-1
(n-1) x 1   Si max < tab[i]
(n-1) x 1         max ← tab[i]
 1    Sortie : max
```

a(n) = 3n -1

```
Algo B : Tableau de n entiers → Entier
      Entree : tab
      Pour i ← 0 à n-1
            est_max ← Vrai
            Pour j ← 0 à n-1
                  Si tab[i] < tab[j]
                        est_max ← Faux
            Si est_max == Vrai
                  max ← tab[i]
                  Arret
      Sortie : max
```

Pour une instruction de complexité f(n) se trouvant dans une boucle qui se répète k fois, on compte k x f(n) instructions élémentaires.

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour trouver la valeur maximum dans un tableau d'entiers

```
Algo A : Tableau de n entiers → Entier
      Entree : tab
 1    max ← tab[0]
n-1   Pour i ← 1 à n-1
(n-1) x 1   Si max < tab[i]
(n-1) x 1         max ← tab[i]
 1    Sortie : max
```

a(n) = 3n -1

```
Algo B : Tableau de n entiers → Entier
      Entree : tab
 n    Pour i ← 0 à n-1
 n x 1      est_max ← Vrai
 n x n      Pour j ← 0 à n-1
 n x n x 1        Si tab[i] < tab[j]
 n x n x 1              est_max ← Faux
 n x 1      Si est_max == Vrai
 n x 1            max ← tab[i]
 n x 1            Arret
 1    Sortie : max
```

Pour une instruction de complexité f(n) se trouvant dans une boucle qui se répète k fois, on compte k x f(n) instructions élémentaires.

$b(n) = 3n^2 + 5n + 1$

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour trouver la valeur maximum dans un tableau d'entiers

```
Algo A : Tableau de n entiers → Entier
      Entree : tab
 1    max ← tab[0]
n-1   Pour i ← 1 à n-1
(n-1) x 1  Si max < tab[i]
(n-1) x 1        max ← tab[i]
 1    Sortie : max
```

$a(n) = 3n - 1$

Algo A est choisi car a(n) croît moins vite que b(n)

```
Algo B : Tableau de n entiers → Entier
      Entree : tab
 n    Pour i ← 0 à n-1
 n x 1      est_max ← Vrai
 n x n      Pour j ← 0 à n-1
 n x n x 1        Si tab[i] < tab[j]
 n x n x 1              est_max ← Faux
 n x 1      Si est_max == Vrai
 n x 1            max ← tab[i]
 n x 1            Arret
 1    Sortie : max
```

Pour une instruction de complexité f(n) se trouvant dans une boucle qui se répète k fois, on compte k x f(n) instructions élémentaires.

$b(n) = 3n^2 + 5n + 1$

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour rechercher la position d'une valeur donnée dans un tableau d'entiers trié

```
Algo A : Entier x Tableau de n entiers
         → Index (Entier)
     Entree : x, tab
n    Pour i ← 0 à n-1
n x 1     Si tab[i] == x
n x 1          position ← i
 1    Sortie : position
```

a(n) = 3n +1

```
Algo B : Entier x Tableau de n entiers
         → Index (Entier)
     Entree : x, tab
     pas_trouve ← Vrai
     debut ← 0
     fin ← n-1
     milieu ← (debut+fin)/2
     Tant que pas_trouve == Vrai
          Si tab[milieu] == x
               position ← milieu
               pas_trouve ← Faux
          Sinon Si x < tab[milieu]
               fin ← milieu -1
          Sinon
               debut ← milieu +1
          milieu ← (debut+fin)/2
```

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour rechercher la position d'une valeur donnée dans un tableau d'entiers trié

```
Algo A : Entier x Tableau de n entiers
            → Index (Entier)
      Entree : x, tab
n     Pour i ← 0 à n-1
n x 1      Si tab[i] == x
n x 1           position ← i
 1     Sortie : position
```

a(n) = 3n +1

```
Algo B : Entier x Tableau de n entiers
            → Index (Entier)
      Entree : x, tab
      pas_trouve ← Vrai
      debut ← 0
      fin ← n-1
      milieu ← (debut+fin)/2
      Tant que pas_trouve == Vrai
            Si tab[milieu] == x
                  position ← milieu
                  pas_trouve ← Faux
            Sinon Si x < tab[milieu]
                  fin ← milieu -1
            Sinon
                  debut ← milieu +1
            milieu ← (debut+fin)/2
```

Pour une boucle dont la taille n'est pas un multiple de n, on choisit une variable dont on peut évaluer la suite des valeurs au cours de l'exécution de la boucle.
Taille de la boucle = taille de la suite des valeurs.

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour rechercher la position d'une valeur donnée dans un tableau d'entiers trié

```
Algo A : Entier x Tableau de n entiers
         → Index (Entier)
     Entree : x, tab
n    Pour i ← 0 à n-1
n x 1     Si tab[i] == x
n x 1          position ← i
 1   Sortie : position
```

a(n) = 3n +1

```
Algo B : Entier x Tableau de n entiers
         → Index (Entier)
     Entree : x, tab
 1   pas_trouve ← Vrai
 1   debut ← 0
 1   fin ← n-1
 1   milieu ← (debut+fin)/2
log(n)Tant que pas_trouve == Vrai
log(n) x 1Si tab[milieu] == x
log(n) x 1     position ← milieu
log(n) x 1     pas_trouve ← Faux
log(n) x 1Sinon Si x < tab[milieu]
log(n) x 1     fin ← milieu -1
          Sinon
log(n) x 1     debut ← milieu +1
log(n) x 1milieu ← (debut+fin)/2
```

b(n) = 8log(n) +4

Pour une boucle dont la taille n'est pas un multiple de n, on choisit une variable dont on peut évaluer la suite des valeurs au cours de l'exécution de la boucle.
Taille de la boucle = taille de la suite des valeurs.

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour rechercher la position d'une valeur donnée dans un tableau d'entiers trié

```
Algo A : Entier x Tableau de n entiers
                → Index (Entier)
        Entree : x, tab
n       Pour i ← 0 à n-1
n x 1       Si tab[i] == x
n x 1           position ← i
 1      Sortie : position
```

a(n) = 3n +1

b(n) = 8log(n) +4

Algo B est choisi car b(n) croît moins vite que a(n)

Pour une boucle dont la taille n'est pas un multiple de n, on choisit une variable dont on peut évaluer la suite des valeurs au cours de l'exécution de la boucle.
Taille de la boucle = taille de la suite des valeurs.

```
Algo B : Entier x Tableau de n entiers
                → Index (Entier)
        Entree : x, tab
 1      pas_trouve ← Vrai
 1      debut ← 0
 1      fin ← n-1
 1      milieu ← (debut+fin)/2
log(n)  Tant que pas_trouve == Vrai
log(n) x 1      Si tab[milieu] == x
log(n) x 1          position ← milieu
log(n) x 1          pas_trouve ← Faux
log(n) x 1      Sinon Si x < tab[milieu]
log(n) x 1          fin ← milieu -1
                Sinon
log(n) x 1          debut ← milieu +1
log(n) x 1      milieu ← (debut+fin)/2
```

Exemple de comparaison

- Algorithmes pour rechercher la position d'une valeur donnée dans un tableau d'entiers trié

```
Algo A : Entier x Tableau de n entiers
                → Index (Entier)
        Entree : x, tab
n       Pour i ← 0 à n-1
n x 1       Si tab[i] == x
n x 1           position ← i
 1      Sortie : position
```

a(n) = 3n +1

b(n) = 8log(n) +4

Algo B est choisi car b(n) croît moins vite que a(n)

Pour une boucle dont la taille n'est pas un multiple de n, on choisit une variable dont on peut évaluer la suite des valeurs au cours de l'exécution de la boucle.
Taille de la boucle = taille de la suite des valeurs.

```
Algo B : Entier x Tableau de n entiers
                → Index (Entier)
        Entree : x, tab
 1      pas_trouve ← Vrai
 1      debut ← 0
 1      fin ← n-1
 1      milieu ← (debut+fin)/2
log(n)  Tant que pas_trouve == Vrai
log(n) x 1      Si tab[milieu] == x
log(n) x 1          position ← milieu
log(n) x 1          pas_trouve ← Faux
log(n) x 1      Sinon Si x < tab[milieu]
log(n) x 1          fin ← milieu -1
                Sinon
log(n) x 1          debut ← milieu +1
log(n) x 1      milieu ← (debut+fin)/2
```

Complexité log(n) ?

- La taille de la boucle Tant que est divisée par 2 à chaque itération jusqu'à une taille égale à 1, donc:

$\underbrace{n,\quad n/2,\quad n/4,\quad n/8,\ \ldots\ ,\ 1}_{k \text{ valeurs}}$

soit:

$n/2^0, n/2^1, n2^2, n2^3, \ldots, n/2^k$

donc: $n/2^k = 1 \rightarrow k = \log(n)$

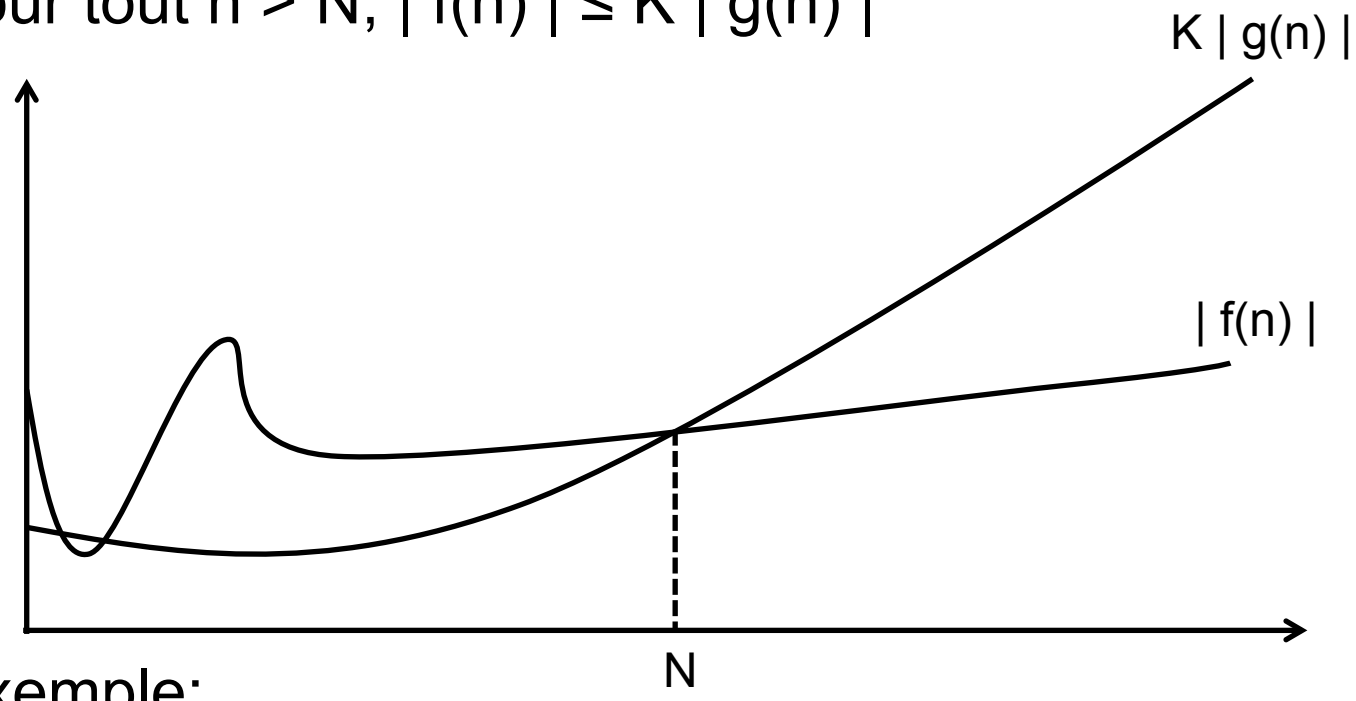
➔ Taille de la boucle = log(n)

```
Algo B : Entier x Tableau de n entiers
                → Index (Entier)
        Entree : x, tab
1       pas_trouve ← Vrai
1       debut ← 0
1       fin ← n-1
1       milieu ← (debut+fin)/2
log(n)  Tant que pas_trouve == Vrai
log(n) x 1  Si tab[milieu] == x
log(n) x 1      position ← milieu
log(n) x 1      pas_trouve ← Faux
log(n) x 1  Sinon Si x < tab[milieu]
log(n) x 1      fin ← milieu -1
                Sinon
log(n) x 1      debut ← milieu +1
log(n) x 1  milieu ← (debut+fin)/2
```

Notation Grand O

- Pour comparer la croissance de deux fonctions au voisinage de l'infini

- f(n) = O(g(n)) si il existe deux constantes K et N telles que pour tout n > N, | f(n) | ≤ K | g(n) |



- Exemple:

  n+1 = O(n) : pour tout n > 1, n+1 ≤ 2 . n

  n = O(n+1) : pour tout n > 0, n ≤ 1 . (n+1)

  $n^2+2n+4 = O(n^2)$: pour tout n > 1, $n^2+2n+4 \leq 7 . n$

  $n^2 = O(n^2+2n+4)$: pour tout n > 0, $n^2 \leq 1 . (n^2+2n+4)$

Ordres de complexité

- Le Grand O définit une relation de semi-ordre sur l'ensemble des fonctions, à partir de laquelle une relation d'équivalence est définie.

- Deux fonctions f(n) et g(n) sont dans la même classe d'équivalence si f(n) = O(g(n)) et g(n) = O(f(n))

  Exemple : n et n+1 ; n^2 et n^2+2n+4 ;

- Les fonctions sont donc regroupées par ordres de complexité similaires et un représentant est choisi pour chaque classe

  Exemple : n, n+1, 3n, 5n + 10… appartiennent à la classe représentée par f(n) = n.

Ordres de complexité

- Ordres de complexité usuels, ordonnés du plus petit au plus grand:

  O(1) : constant
  O(log(n)) : logarithmique
  O(n) : linéaire
  O(nlog(n)) : sub-quadratique
  $O(n^2)$: quadratique
  $O(n^3)$: cubique
  $O(n^C)$: polynomial (exemple: n^4, n^5, …)
  $O(C^n)$: exponentiel (exemple 2^n, 3^n, …)
  O(n!) : factoriel

- En pratique pour la complexité dans le pire des cas:

  Instruction élémentaire ➔ O(1)
  Boucle « pour » ➔ O(n)
  k boucles « pour » imbriquées ➔ n^k

Combinaison de complexités

- Un fonction f peut être une combinaison de fonctions plus simples. On peut exprimer la complexité de f en fonction des complexités de ces fonctions plus simples.

- Si $f1(n) = O(g1(n))$ et $f2(n) = O(g2(n))$
  - $f(n) = f1(n).f2(n) \rightarrow f(n) = O(g1(n).g2(n))$
  - $f(n) = f1(n) + f2(n) \rightarrow f(n) = O(\max_O(g1(n),g2(n)))$ (maximum en termes de Grand O)
  - $f(n) = K \, . \, f1(n) \rightarrow f(n) = O(g1(n))$

- Exemple:
  - $4n^3 + 2n^2 + 20 = O(n^3)$
  - $n^3 + 5\, n \log(n)^2 = O(n^3)$
  - $n + n \log(2^n) = O(n^2)$
  - $2^n + 10! = O(2^n)$